

Polynômes multivariés en Sage

Viviane Pons

Journée logiciels du Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge

6 mars 2012

Le projet

Développer en Sage

Problématique informatique-mathématique

Le cadre

Projet développé dans le cadre de mon stage de M2, puis suivi au cours de ma thèse.

Le cadre

Projet développé dans le cadre de mon stage de M2, puis suivi au cours de ma thèse.

L'objectif

Développer les bases de l'anneau des polynômes en Sage.

Polynômes Multivariés

Polynômes Multivariés

$\mathfrak{Pol}(x_1, \dots, x_n) :=$ ensemble des polynômes en n variables.

Un monôme est de la forme

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un vecteur de \mathbb{Z}^n

Polynômes : somme formelle de vecteurs

On définit une action sur les vecteurs.

Soit $v \in \mathbb{Z}^n$

$$vs_i = (\dots, v_{i+1}, v_i, \dots)$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rightarrow$ Permutations de n

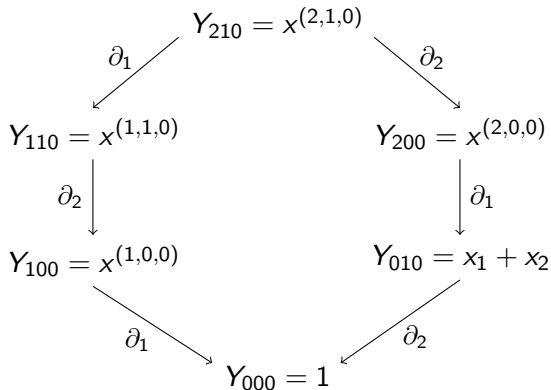
De l'action sur les vecteurs, on tire une action sur les polynômes :

$$x^v s_i = x^{vs_i}$$

On définit un opérateur de *différence divisée*

$$f \partial_i = \frac{f - f^{s_i}}{x_i - x_{i+1}}$$

Base de Schubert :



Les polynômes de Schubert forment une **base linéaire des polynômes à n variables**.

Exemple :

$$x^{(2,3,1)} + x^{(1,1,2)} = Y_{112} - Y_{121} + Y_{231} - Y_{321}$$

D'autres opérateurs créent d'autres bases : base de Demazure

$$x^{(1,2,3)} = K_{123} - K_{132} - K_{213} + K_{231} + K_{312} - K_{321}$$

Les objectifs de notre implantation :

Les objectifs de notre implantation :

- Un anneau multibases

Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables

Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables

Développer pour comprendre : aborder la recherche par le développement

Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables

Développer pour comprendre : aborder la recherche par le développement

Dans quel cadre ?

Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables

Développer pour comprendre : aborder la recherche par le développement

Dans quel cadre ?

Le logiciel Sage.

Qu'est ce que Sage ?

Qu'est ce que Sage ?

- Un logiciel de calcul formel

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetrica, ...

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetrca, ...
- ▶ Une communauté de développeurs

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetriza, ...
- ▶ Une communauté de développeurs
- ▶ Un logiciel écrit en Python

Quelques chiffres

- ▶ Créé en 2005
- ▶ 245 contributeurs
- ▶ environ 10000 utilisateurs

L'implantation au sein de Sage nous permet :

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- L'intégration à une communauté de développeur

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ L'intégration à une communauté de développeur
- ▶ Une large diffusion

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ L'intégration à une communauté de développeur
- ▶ Une large diffusion
- ▶ Une exigence de qualité

Où en sommes-nous ?

Où en sommes-nous ?

- Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Evènements :

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Evènements :

- ▶ Présentation lors du Séminaire Lotharingien de Combinatoire 66 en 2011

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Evènements :

- ▶ Présentation lors du Séminaire Lotharingien de Combinatoire 66 en 2011
- ▶ Présentation lors de FPSAC 2011 en Islande

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Evènements :

- ▶ Présentation lors du Séminaire Lotharingien de Combinatoire 66 en 2011
- ▶ Présentation lors de FPSAC 2011 en Islande
- ▶ Présentation prévue lors des Journées Sage de Montréal en mai 2012

Où en sommes-nous ?

- ▶ Un patch fonctionnel, disponible sous Sage-combinat
- ▶ + de 6000 lignes de code
- ▶ Objectif : intégration à Sage

Evènements :

- ▶ Présentation lors du Séminaire Lotharingien de Combinatoire 66 en 2011
- ▶ Présentation lors de FPSAC 2011 en Islande
- ▶ Présentation prévue lors des Journées Sage de Montréal en mai 2012
- ▶ Participation à de nombreux workshop (Cernay 2010 et Cernay 2012)

Développer en Sage, c'est développer en Python. On rejoint les problématiques générales du développement pour les mathématiques.

Python

- ▶ Un langage interprété
- ▶ Orienté objet

Développer en Sage, c'est développer en Python. On rejoint les problématiques générales du développement pour les mathématiques.

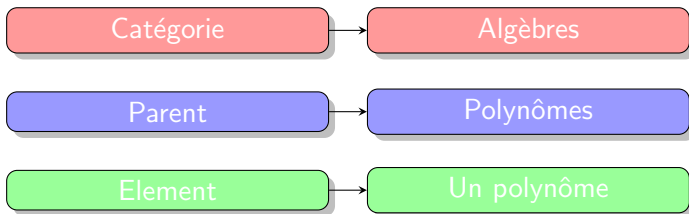
Python

- ▶ Un langage interprété
- ▶ Orienté objet

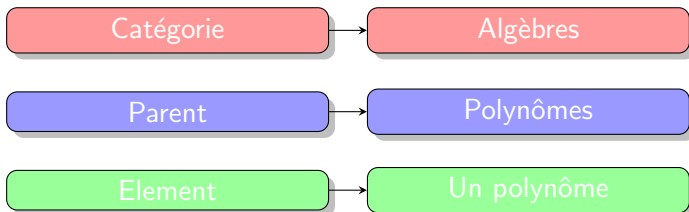
Problématique

Quelle architecture pour les structures mathématiques ?

Un parallélisme de structures : objets / mathématiques

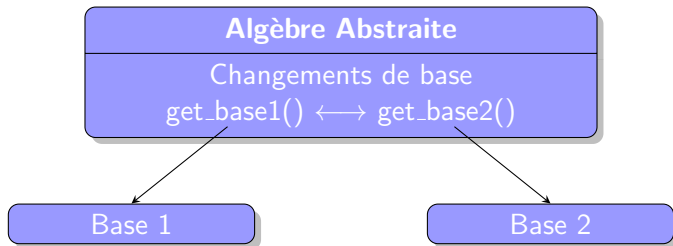


Un parallélisme de structures : objets / mathématiques

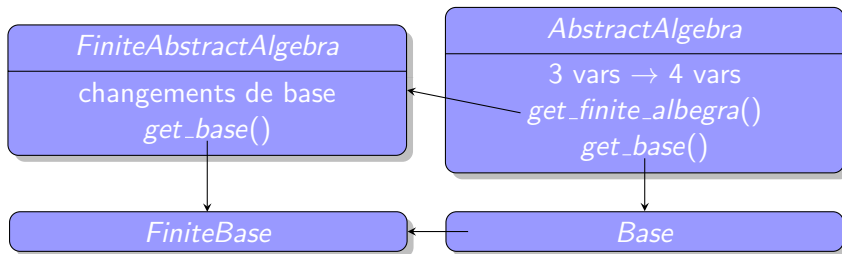


Quelle architecture pour les polynômes multivariés ? Réflexion menée avec Adrien Boussicault et Nicolas Borie.

Architecture standard pour les algèbres multi-bases :

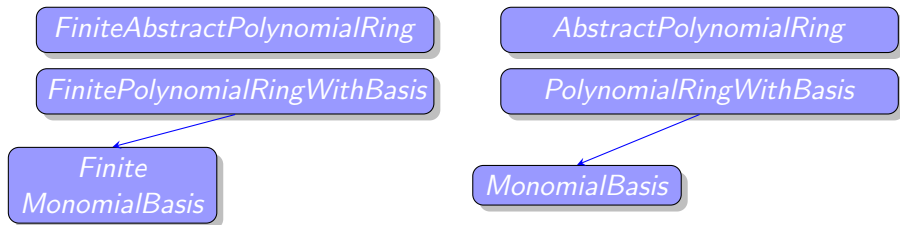


Deux types de classes : les classes *Finite* et la classe union

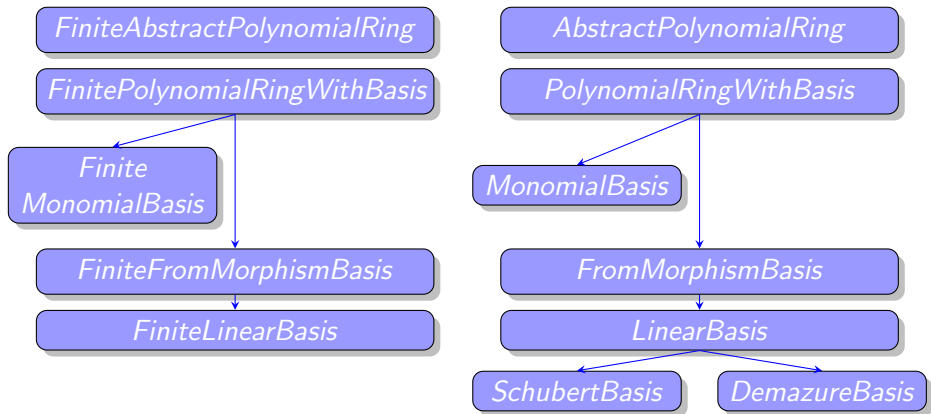


Processus presque invisible pour l'utilisateur.

Définir les bases (Schubert, Demazure) à partir de leurs conversions dans la base monomiale.



Définir les bases (Schubert, Demazure) à partir de leurs conversions dans la base monomiale.



L'implantation au sein de Sage nous permet :

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- L'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ L'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs
- ▶ L'utilisation d'algorithmes : changements de bases triangulaires

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ L'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs
- ▶ L'utilisation d'algorithmes : changements de bases triangulaires
- ▶ Une programmation modulaire : indépendance par rapport au corps de base, création des polynômes doubles

Conclusion

Sage a d'abord été une motivation pour le projet puis un véritable atout à la fois technique et en terme de communauté.

Conclusion

Sage a d'abord été une motivation pour le projet puis un véritable atout à la fois technique et en terme de communauté.

Contraintes ?

Conclusion

Sage a d'abord été une motivation pour le projet puis un véritable atout à la fois technique et en terme de communauté.

Contraintes ?

- Lourdeur des procédures, exigences formelles

Conclusion

Sage a d'abord été une motivation pour le projet puis un véritable atout à la fois technique et en terme de communauté.

Contraintes ?

- ▶ Lourdeur des procédures, exigences formelles
- ▶ Nombreuses mises à jours qui nécessitent de tester régulièrement la compatibilité du patch

Conclusion

Sage a d'abord été une motivation pour le projet puis un véritable atout à la fois technique et en terme de communauté.

Contraintes ?

- ▶ Lourdeur des procédures, exigences formelles
- ▶ Nombreuses mises à jours qui nécessitent de tester régulièrement la compatibilité du patch
- ▶ Pas encore généralisé auprès des utilisateurs, pas de méthode "rapide et facile" pour utiliser le patch



The Sage website

<http://www.sagemath.org/>



The Sage-Combinat website

<http://wiki.sagemath.org/combinat>



Article et exposés

<http://www-igm.univ-mlv.fr/~pons>

<http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s66pons.html>