Opérateurs de réordonnement et intervalles pour l'ordre de Bruhat

Viviane Pons

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Rencontre du GT CombAlg - 23 juin 2011

Définition de l'ordre de Bruhat

Définition de l'ordre de Bruhat

Un ordre sur les permutations, gradué selon le nombre d'inversions.

Définition de l'ordre de Bruhat

Un ordre sur les permutations, gradué selon le nombre d'inversions. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, μ est un successeur de σ dans l'ordre de Bruhat ssi :

- $\mu = \sigma\tau$ avec τ transposition
- $\ell(\mu) = \ell(\sigma) + 1$

Exemple :

352614

$\underline{53}2614$ $\underline{4}5261\underline{3}$ $3\underline{6}2\underline{5}14$ $35\underline{62}14$ $35\underline{4}61\underline{2}$ $352\,6\underline{41}$

Exemple :

352614

$\underline{53}2614$ $\underline{4}5261\underline{3}$ $3\underline{6}2\underline{5}14$ $35\underline{62}14$ $35\underline{4}61\underline{2}$ $3526\underline{41}$

Contrexemple : $\underline{6}52\underline{3}14$ n'est pas un successeur, ajout des inversions

Exemple :

$$\begin{array}{cccccc} & & 352614 & & & \\ \underline{53}2614 & \underline{4}5261\underline{3} & 3\underline{6}2\underline{5}14 & 35\underline{62}14 & 35\underline{4}61\underline{2} & 3526\underline{41} \end{array}$$

Contrexemple : $\underline{6}52\underline{3}14$ n'est pas un successeur, ajout des inversions (6,3)

Exemple :

$$352614$$

$\underline{53}2614$ $\underline{4}5261\underline{3}$ $3\underline{6}2\underline{5}14$ $35\underline{62}14$ $35\underline{4}61\underline{2}$ $3526\underline{41}$

Contrexemple : $\underline{6}{\color{red}5}2\underline{{\color{red}3}}14$ n'est pas un successeur, ajout des inversions (6,3) (5,3)

Exemple :

352614

$\underline{53}2614$ $\underline{4}5261\underline{3}$ $3\underline{6}2\underline{5}14$ $35\underline{62}14$ $35\underline{4}61\underline{2}$ $3526\underline{41}$

Contrexemple : $\underline{6}52\underline{3}14$ n'est pas un successeur, ajout des inversions (6,3) (5,3)

Successeurs : $..b...d.. \rightarrow ..d...b..$ avec entre b et d, uniquement des valeurs $a < b$ ou $e > d$

Exemple :

352614

$\underline{53}2614$ $\underline{4}5261\underline{3}$ $3\underline{6}2\underline{5}14$ $35\underline{62}14$ $35\underline{4}61\underline{2}$ $3526\underline{41}$

Permutoèdre droit

Permutoèdre gauche

π et $\hat{\pi}$, opérateurs de réordonnement sur les permutations.

π et $\hat{\pi}$, opérateurs de réordonnement sur les permutations.

$$K = \{K_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{S}_n\}, \hat{K} = \{\hat{K}_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

$$K_\omega = \hat{K}_\omega, \; \omega = [n, n-1, \ldots, 2, 1]$$

π et $\hat{\pi}$, opérateurs de réordonnement sur les permutations.

$$K = \{K_\sigma; \sigma \in \mathfrak{S}_n\}, \hat{K} = \{\hat{K}_\sigma; \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

$$K_\omega = \hat{K}_\omega, \; \omega = [n, n-1, \ldots, 2, 1]$$

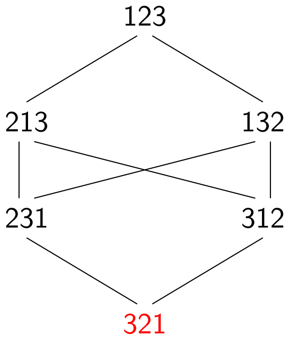
On définit π et $\hat{\pi}$ par

$$K_\sigma \pi_i = \begin{cases} K_{\sigma s_i} & \text{si } \sigma_i > \sigma_{i+1} \\ K_\sigma & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{K}_\sigma \hat{\pi}_i = \begin{cases} \hat{K}_{\sigma s_i} & \text{si } \sigma_i > \sigma_{i+1} \\ -\hat{K}_\sigma & \text{sinon} \end{cases}$$

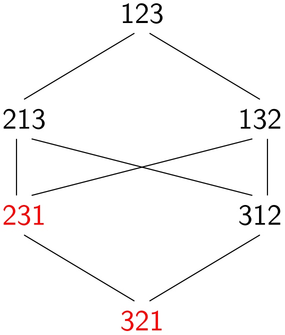
$$\hat{\pi}_i = \pi_i - Id$$

Relations entre π et $\hat{\pi}$



$$\hat{K}_{321} = K_{321}$$

Relations entre π et $\hat{\pi}$

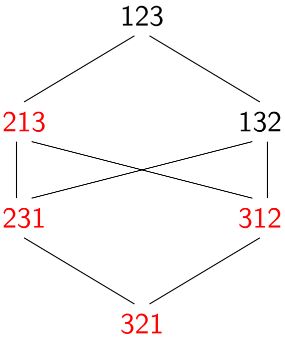


$$\hat{K}_{321} = K_{321}$$

$$\hat{K}_{231} = \hat{K}_{321}\hat{\pi}_1 = K_{321}\hat{\pi}_1$$

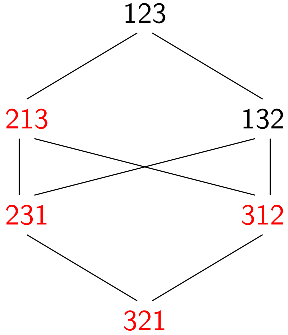
$$= K_{231} - K_{321}$$

Relations entre π et $\hat{\pi}$



$$
\begin{aligned}
\hat{K}_{321} &= K_{321} \\
\hat{K}_{231} &= \hat{K}_{321}\hat{\pi}_1 = K_{321}\hat{\pi}_1 \\
&= K_{231} - K_{321} \\
\hat{K}_{213} &= \hat{K}_{231}\hat{\pi}_2 = K_{231}\hat{\pi}_2 - K_{321}\hat{\pi}_2 \\
&= K_{213} - K_{231} - K_{312} + K_{321}
\end{aligned}
$$

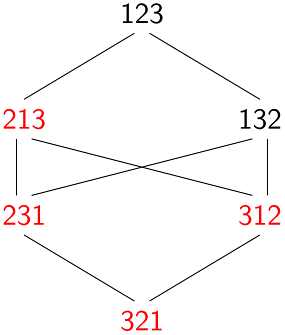
Relations entre π et $\hat{\pi}$



$$
\begin{aligned}
\hat{K}_{321} &= K_{321} \\
\hat{K}_{231} &= \hat{K}_{321}\hat{\pi}_1 = K_{321}\hat{\pi}_1 \\
&= K_{231} - K_{321} \\
\hat{K}_{213} &= \hat{K}_{231}\hat{\pi}_2 = K_{231}\hat{\pi}_2 - K_{321}\hat{\pi}_2 \\
&= K_{213} - K_{231} - K_{312} + K_{321}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{K}_\sigma &= \textstyle\sum_{\mu \geq \sigma} (-1)^{\ell(\mu)-\ell(\sigma)} K_\mu \\
K_\sigma &= \textstyle\sum_{\mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu
\end{aligned}
$$

Relations entre π et $\hat{\pi}$



$$
\begin{aligned}
\hat{K}_{321} &= K_{321} \\
\hat{K}_{231} &= \hat{K}_{321}\hat{\pi}_1 = K_{321}\hat{\pi}_1 \\
&= K_{231} - K_{321} \\
\hat{K}_{213} &= \hat{K}_{231}\hat{\pi}_2 = K_{231}\hat{\pi}_2 - K_{321}\hat{\pi}_2 \\
&= K_{213} - K_{231} - K_{312} + K_{321}
\end{aligned}
$$

$$
(\pi_i - 0)(\pi_i - 1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \hat{K}_\sigma & = \sum_{\mu \geq \sigma} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} K_\mu \\ K_\sigma & = \sum_{\mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu \end{array}
$$

Produits de π et $\hat{\pi}$

Produits de π et $\hat{\pi}$

- relations de tresses sur les π et les $\hat{\pi}$ séparément

Produits de π et $\hat{\pi}$

- relations de tresses sur les π et les $\hat{\pi}$ séparément
- une relation simple entre π_i et $\hat{\pi}_i$

Produits de π et $\hat{\pi}$

- relations de tresses sur les π et les $\hat{\pi}$ séparément
- une relation simple entre π_i et $\hat{\pi}_i$
- produit quelconque de π et $\hat{\pi}$: problème complexe

Produits de π et $\hat{\pi}$

- relations de tresses sur les π et les $\hat{\pi}$ séparément
- une relation simple entre π_i et $\hat{\pi}_i$
- produit quelconque de π et $\hat{\pi}$: problème complexe

Étude d'un produit particulier

Motivations géométriques : polynômes de Grothendieck, caractères de Demazure

Projection sur les sous groupes de Young

Pour un entier k donné, on étudie la projection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$.

Projection sur les sous groupes de Young

Pour un entier k donné, on étudie la projection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$.
À $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe un représentant canonique ζ dans $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$.

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = 43678215 \\ k = 3\end{array}\right\} \zeta = 643|87521$$

Projection sur les sous groupes de Young

Pour un entier k donné, on étudie la projection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$.
À $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe un représentant canonique ζ dans $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$.

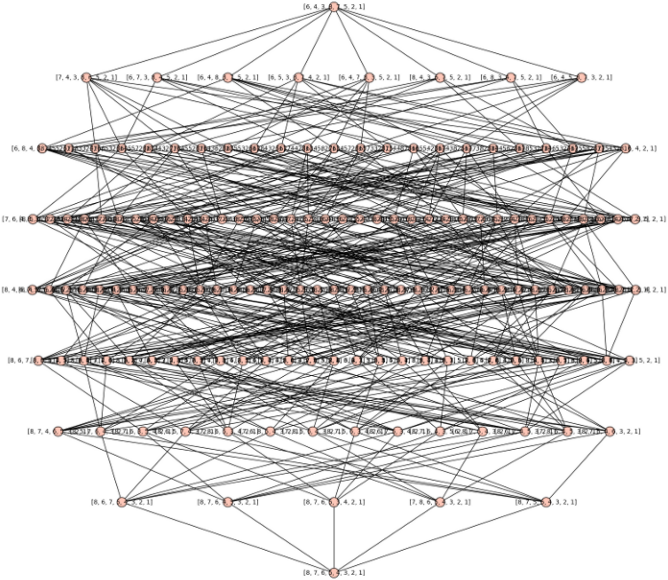
$$\left.\begin{array}{l} \sigma = 43678215 \\ k = 3 \end{array}\right\} \zeta = 643|87521$$

On cherche à calculer

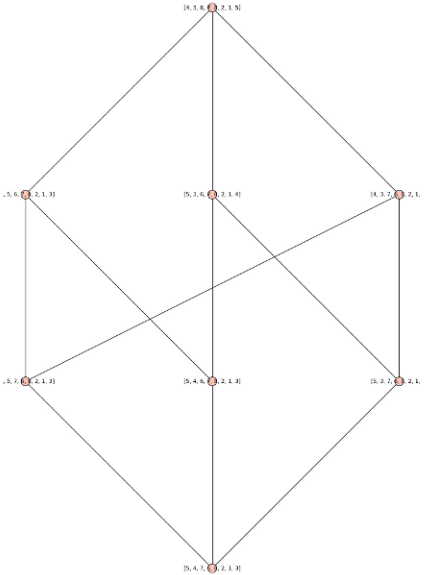
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} =$$

$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} =$
(152 termes)



$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} =$
(8 termes)



$\sigma = 43678215$

K_ω

$\zeta = 643|87521$

$\omega = 87654321$

$\sigma = 43678215$

$\zeta = 643|87521$

s_3

64837521

87653421

s_5

$\omega = 87654321$

$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta}$

$\sigma = 43678215$

s_2

46378215

64387251

s_6

$\zeta = 643|87521$

s_3

64837521

87653421

s_5

$\omega = 87654321$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}$$

$\sigma = 43678215$

s_2

46378215

64387251

s_6

$\zeta = 643|87521$

s_3

64837521

87653421

s_5

$\omega = 87654321$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$\sigma = 43678215$

$\zeta = 643|87521$

s_3

64837521

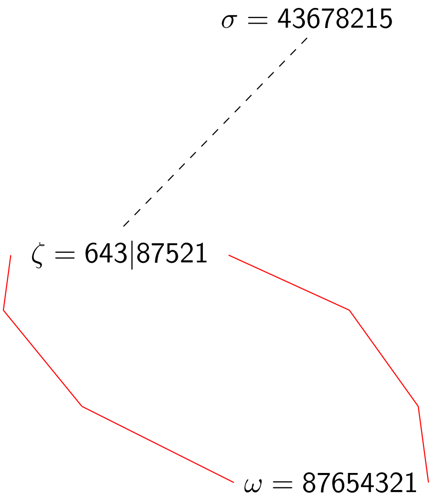
87653421

s_5

$\omega = 87654321$

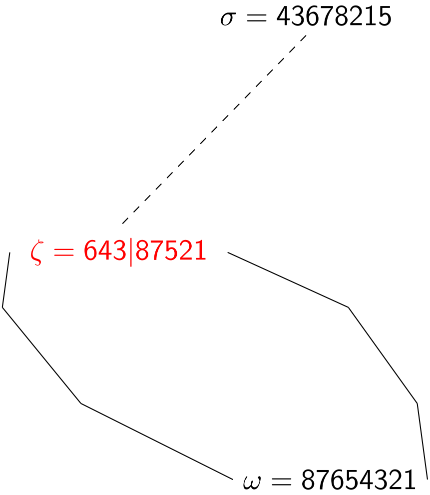
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta}$$



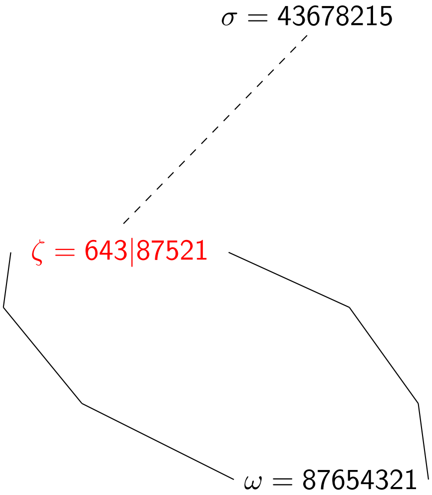
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$



$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

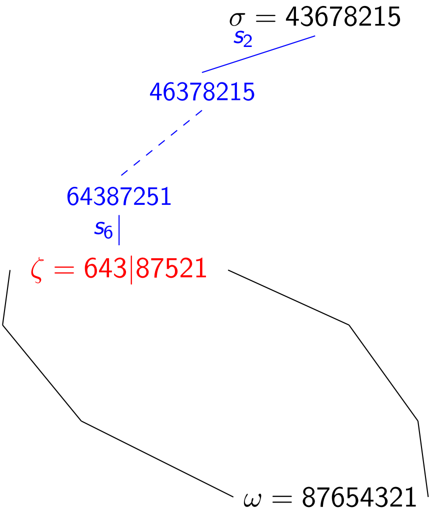
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$
$$= \hat{K}_\zeta$$



$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$
$$= \hat{K}_\zeta$$

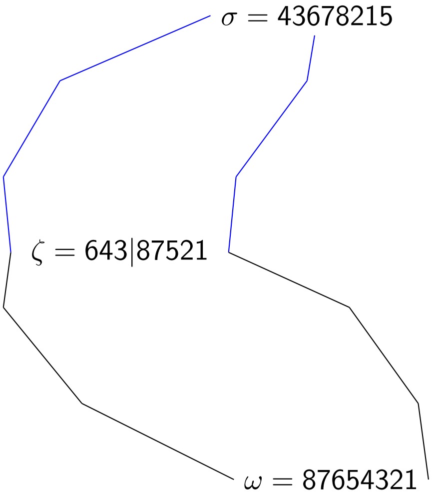
$\hat{K}_\zeta$



$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$
$$= \hat{K}_\zeta$$

$$\hat{K}_\zeta \pi_{\zeta^{-1}\sigma}$$

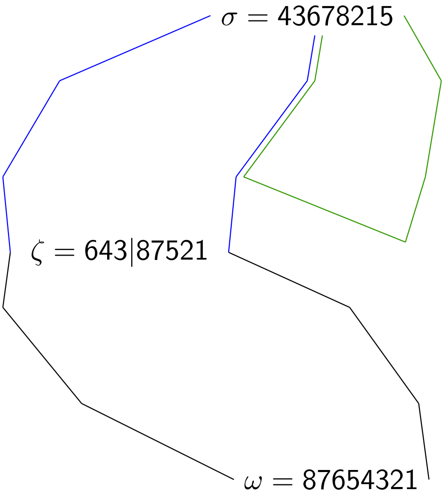


$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$

$$= \hat{K}_\zeta$$

$$\hat{K}_\zeta \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma \leq \mu \leq \zeta} \hat{K}_\mu$$



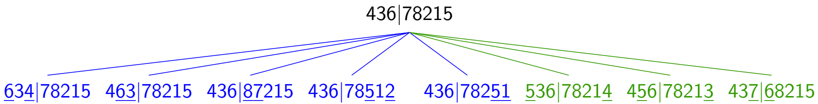
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = ?$$

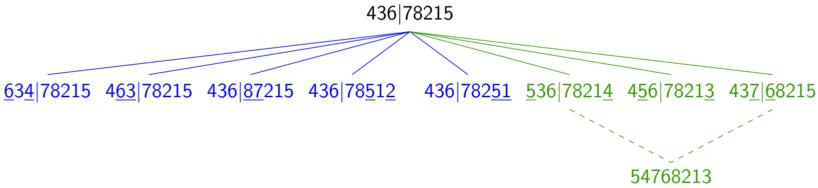
$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} \pm K_\mu$$

$$= \hat{K}_\zeta$$

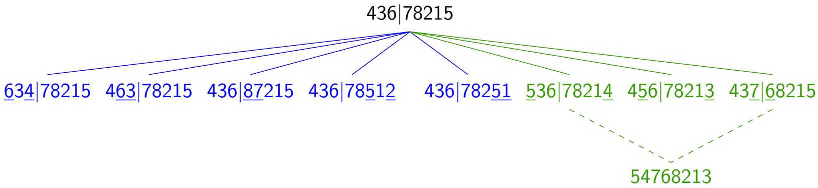
$$\hat{K}_\zeta \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma \leq \mu \leq \zeta} \hat{K}_\mu$$

$$= \sum_{\nu} \pm K_\nu$$


436|78215
634|78215
463|78215
436|87215
436|78512
436|78251
536|78214
456|78213
437|68215



Le sup des successeurs verts existe toujours.



Le sup des successeurs verts existe toujours.

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma \leq \mu \leq sup} \pm K_\mu$$

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4 1 6 3 5 2

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4

4 1 6 3 5 2

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4 4
1

4 1 6 3 5 2

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4 1 6 3 5 2

4	4	6
	1	4
		1

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

$$\color{red}{4\ 1\ 6\ 3}\color{black}{\ 5\ 2} \qquad \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 6 & \color{red}{6} \\ & 1 & 4 & \color{red}{4} \\ & & 1 & \color{red}{3} \\ & & & \color{red}{1} \end{array}$$

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4 1 6 3 5 2

4	4	6	6	6
	1	4	4	5
		1	3	4
			1	3
				1

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

$$4\ 1\ 6\ 3\ 5\ 2 \qquad \begin{array}{ccccc} & & \leq & & \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ & 1 & 4 & 4 & 5 \\ & & 1 & 3 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{array}$$

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

4 1 6 3 5 2

$\wedge$

6 3 5 1 4 2

4	4	6	6	6
	1	4	4	5
		1	3	4
			1	3
				1

Comparaisons dans l'ordre de Bruhat

tableaux d'Ehresmann

$$
\begin{array}{ccccc}
4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\
 & 1 & 4 & 4 & 5 \\
 & & 1 & 3 & 4 \\
 & & & 1 & 3 \\
 & & & & 1
\end{array}
\qquad 4\ 1\ 6\ 3\ 5\ 2
$$

$$\wedge \qquad\qquad \wedge$$

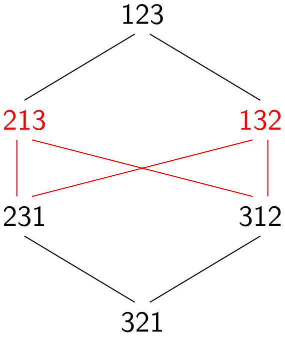
$$
6\ 3\ 5\ 1\ 4\ 2 \qquad
\begin{array}{ccccc}
6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
 & & 3 & 3 & 4 \\
 & & & 1 & 3 \\
 & & & & 1
\end{array}
$$

Maximum dans l'ordre de Bruhat

treillis sur les tableaux d'Ehresmann

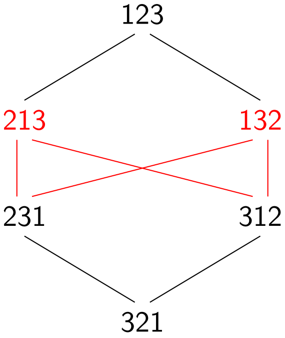
Maximum dans l'ordre de Bruhat

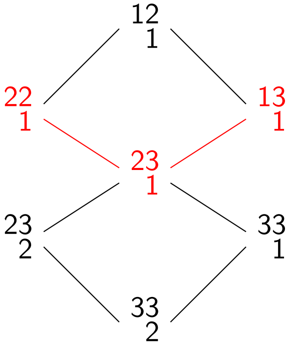
treillis sur les tableaux d'Ehresmann



Maximum dans l'ordre de Bruhat

treillis sur les tableaux d'Ehresmann





Maximums d'ensemble et maximums deux à deux

Maximums d'ensemble et maximums deux à deux

Soit $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ un ensemble de permutations

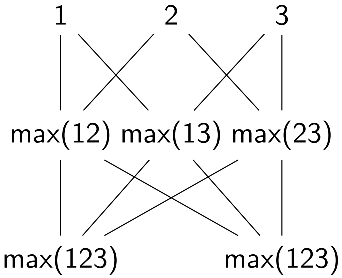
$$\forall p_i, p_j \in P, max(p_i, p_j) \in \mathfrak{S}_n \Longrightarrow max(p_1, \ldots, p_k) \in \mathfrak{S}_n$$

Maximums d'ensemble et maximums deux à deux

Soit $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ un ensemble de permutations

$$\forall p_i, p_j \in P, max(p_i, p_j) \in \mathfrak{S}_n \Longrightarrow max(p_1, \ldots, p_k) \in \mathfrak{S}_n$$

Motif absent dans Bruhat :



Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215 43678512

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

$$\begin{array}{ccc} & 43678215 & \\ 63478215 & & 43678512 \\ & 63478512 & \end{array}$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 43678215 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
63478215 \arrow[dr, dash] & & 43678512 \arrow[dl, dash] \\
 & 63478512 &
\end{tikzcd}
$$

$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215

$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215　　45678213

$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

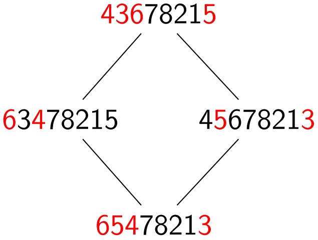
63478215 45678213

65478213

$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux



$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \quad \rightarrow ..d..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

$$..a..b..a'..b'.. \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \rightarrow ..d..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

46378215

$$..a..b..a'..b'.. \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

$$..b..a..d..c.. \rightarrow ..d..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

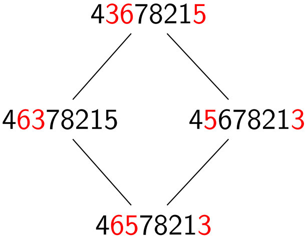
46378215 45678213

$$..a..b..a'..b'.. \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$

$$..b..a..d..c.. \rightarrow ..d..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

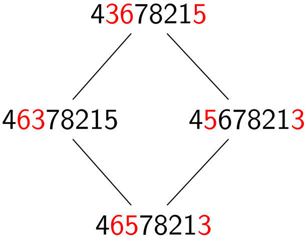
Etude des maximums deux à deux



$$..a..b..a'..b'.. \to ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \to ..d..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux



$$
\begin{array}{ll}
..a..b..a'..b'.. & \rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. & \rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. & \rightarrow ..c..b..a..
\end{array}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

$$
\begin{aligned}
&..a..b..a'..b'.. &&\rightarrow ..b..a..b'..a'..\\
&..b..a..d..c.. &&\rightarrow ..d..c..b..a..\\
&..a..c..b.. &&\rightarrow ..c..b..a..
\end{aligned}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

45678213

$$
\begin{array}{ll}
..a..b..a'..b'.. & \rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. & \rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. & \rightarrow ..c..b..a..
\end{array}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

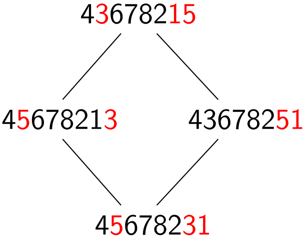
43678215

45678213 43678251

$$..a..b..a'..b'.. \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \rightarrow ..d..c..b..a..$$
$$..a..c..b.. \rightarrow ..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

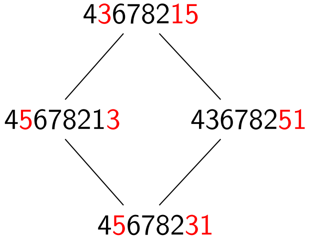
Etude des maximums deux à deux



$$..a..b..a'..b'.. \quad \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \quad \rightarrow ..d..c..b..a..$$
$$..a..c..b.. \quad \rightarrow ..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux



$$..a..b..a'..b'.. \rightarrow ..b..a..b'..a'..$$
$$..b..a..d..c.. \rightarrow ..d..c..b..a..$$
$$..a..c..b.. \rightarrow ..c..b..a..$$
$$..b..a..c.. \rightarrow ..c..b..a..$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

$$
\begin{aligned}
..a..b..a'..b'.. &\rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. &\rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. &\rightarrow ..c..b..a.. \\
..b..a..c.. &\rightarrow ..c..b..a..
\end{aligned}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215

$$
\begin{aligned}
..a..b..a'..b'.. &\rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. &\rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. &\rightarrow ..c..b..a.. \\
..b..a..c.. &\rightarrow ..c..b..a..
\end{aligned}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215 43768215

$$
\begin{array}{ll}
..a..b..a'..b'.. & \rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. & \rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. & \rightarrow ..c..b..a.. \\
..b..a..c.. & \rightarrow ..c..b..a..
\end{array}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

43678215

63478215 43768215

$max \notin \mathfrak{S}_n$

$$
\begin{aligned}
&..a..b..a'..b'.. &&\rightarrow ..b..a..b'..a'..\\
&..b..a..d..c.. &&\rightarrow ..d..c..b..a..\\
&..a..c..b.. &&\rightarrow ..c..b..a..\\
&..b..a..c.. &&\rightarrow ..c..b..a..
\end{aligned}
$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

$$\begin{array}{ccc} & 43678215 & \\ \diagup & & \diagdown \\ 63478215 & & 43768215 \\ \diagdown & & \diagup \\ & max \notin \mathfrak{S}_n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
..a..b..a'..b'.. & \rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. & \rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. & \rightarrow ..c..b..a.. \\
..b..a..c.. & \rightarrow ..c..b..a.. \\
..a..b..c.. & \rightarrow max \notin \mathfrak{S}_n \text{ (conjecture)}
\end{array}$$

Successeurs d'une permutation

Etude des maximums deux à deux

$$
\begin{array}{ll}
..a..b..a'..b'.. & \rightarrow ..b..a..b'..a'.. \\
..b..a..d..c.. & \rightarrow ..d..c..b..a.. \\
..a..c..b.. & \rightarrow ..c..b..a.. \\
..b..a..c.. & \rightarrow ..c..b..a.. \\
..a..b..c.. & \rightarrow max \notin \mathfrak{S}_n \text{ (conjecture)}
\end{array}
$$

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

12345678

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

$$12|345|67|8$$

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

$$12|345|67|8$$
$$12|67|345|8$$

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

$$12|345|67|8$$

$$12|67|345|8 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$$

Permutations Bigrassmanniennes

Permutations comportant 1 seule descente et 1 seul recul

$$12|345|67|8$$
$$12|67|345|8 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$$

Théorème (Lascoux, Schützenberger)

L'ensemble des permutations bigrassmanniennes forme une base de l'ordre de Bruhat.

Comparaison permutation / bigrassmannienne

Soit $\beta = r_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ une bigrassmannienne.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$$

Comparaison permutation / bigrassmannienne

Soit $\beta = r_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ une bigrassmannienne.

$$\beta < \sigma \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \leq 62784135$$

Comparaison permutation / bigrassmannienne

Soit $\beta = r_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ une bigrassmannienne.

$$\beta < \sigma \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \leq 6278|4135$$

Dans le facteur gauche de taille $r_0 + r_1$,

Comparaison permutation / bigrassmannienne

Soit $\beta = r_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ une bigrassmannienne.

$$\beta < \sigma \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \leq 6278|4135$$

Dans le facteur gauche de taille $r_0 + r_1$, σ comporte au moins r_1 valeurs $> r_0 + r_2$.

$$\sigma = ..a..c..b..$$

$$p_1 = ..c..a..b.. \qquad p_2 = ..b..c..a..$$

$$p_{max} = ..c..b..a..$$

$$\begin{tikzcd}
 & \sigma = ..a..c..b.. \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
p_1 = ..c..a..b.. \arrow[dr, dash] & & p_2 = ..b..c..a.. \arrow[dl, dash] \\
 & p_{max} = ..c..b..a.. &
\end{tikzcd}$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \sigma = ..a..c..b.. \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
p_1 = ..c..a..b.. \arrow[dr, no head] & & p_2 = ..b..c..a.. \arrow[dl, no head] \\
 & p_{max} = ..c..b..a.. &
\end{tikzcd}$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$\sigma =$..a..c..b..

$p_1 =$..c..a..b.. $\quad p_2 =$ ..b..c..a..

$p_{max} =$ ..c..b..a..

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$r_0 + r_1$

$$\sigma = ..a..c..b..$$

$$p_1 = ..c..a..b.. \qquad p_2 = ..b..c..a..$$

$$p_{max} = ..c..b..a..$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$r_0 + r_1$

$.|.c..b..a.. \quad \beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq \sigma$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \sigma = ..a..c..b.. \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
p_1 = ..c..a..b.. \arrow[dr, dash] & & p_2 = ..b..c..a.. \arrow[dl, dash] \\
 & p_{max} = ..c..b..a.. &
\end{tikzcd}
$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$r_0 + r_1$

$.|.c..b..a..$ $\quad \beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq \sigma$

$..c.|.b..a..$ $\quad \beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq p_1$

$$\sigma = ..a..c..b..$$

$$p_1 = ..c..a..b.. \qquad p_2 = ..b..c..a..$$

$$p_{max} = ..c..b..a..$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$r_0 + r_1$

$.\vert.c..b..a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq \sigma$
$..c.\vert.b..a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq p_1$
$..c..b.\vert.a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq p_2$

$$\sigma = ..a..c..b..$$

$$p_1 = ..c..a..b.. \qquad p_2 = ..b..c..a..$$

$$p_{max} = ..c..b..a..$$

$$\{\beta \leq p_1\} \cup \{\beta \leq p_2\} = \{\beta \leq p_{max}\}$$

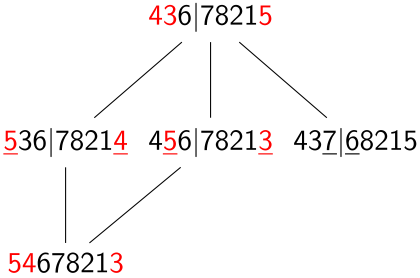
$\subset$ trivial, preuve de $\supset$:

$r_0 + r_1$

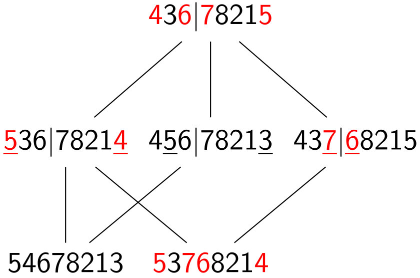
$.\vert.c..b..a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq \sigma$
$..c.\vert.b..a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq p_1$
$..c..b.\vert.a..$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq p_2$
$..c..b..a.\vert.$	$\beta \leq p_{max} \Rightarrow \beta \leq \sigma$

$$436|78215$$

$$\underline{5}36|7821\underline{4} \qquad 4\underline{5}6|7821\underline{3} \qquad 43\underline{7}|\underline{6}8215$$



$..b..a..c.. \quad \rightarrow ..c..b..a..$



$..b..a..c.. \quad \rightarrow ..c..b..a..$

$..a..c..d..b.. \quad \rightarrow ..b..d..c..a..$

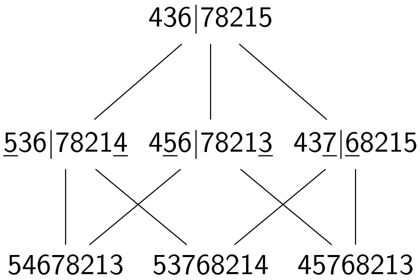
$436|78215$

$\underline{5}36|7821\underline{4}$ $\quad$ $4\underline{5}6|7821\underline{3}$ $\quad$ $43\underline{7}|\underline{6}8215$

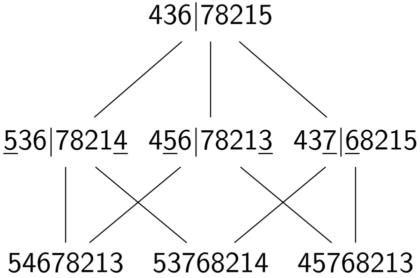
54678213 $\quad$ 53768214 $\quad$ 45768213

$..b..a..c.. \quad \rightarrow ..c..b..a..$

$..a..c..d..b.. \quad \rightarrow ..b..d..c..a..$



$$..b..a..c.. \rightarrow ..c..b..a..$$
$$..a..c..d..b.. \rightarrow ..b..d..c..a..$$
$$..a..c..b.. \rightarrow ..c..b..a..$$

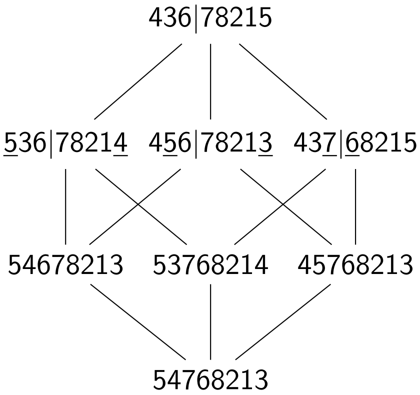


$..b..a..c.. \rightarrow ..c..b..a..$

$..a..c..d..b.. \rightarrow ..b..d..c..a..$

$..a..c..b.. \rightarrow ..c..b..a..$

$\cancel{..a..b..c..}$



$..b..a..c.. \rightarrow ..c..b..a..$

$..a..c..d..b.. \rightarrow ..b..d..c..a..$

$..a..c..b.. \rightarrow ..c..b..a..$

~~..a..b..c..~~

Pour aller plus loin...

- Étudier ces intervalles de façon plus précise
- Variation du maximum de l'intervalle en fonction de k : construction récursive